MATEMATICA FINANZIARIA

Dimostrazione dell'equivalenza delle formule per il calcolo del montante semplice di rate costanti annue:

$$R \times \left(k + r \frac{\sum n_i}{12} \right) = R \times \left(k + r \frac{k \pm 1}{2} \right)$$

APPROFONDIMENTI

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA PRATICA

Si deve dimostrare che:

$$\frac{\sum n_i}{12} = \frac{k \pm 1}{2}$$

Σn_i è una somma della **progressione aritmetica** per la quale vale la seguente espressione:

$$a_k = a_1 + (k-1)q$$

dove a_1 è il primo termine, a_k l'ultimo termine, k il numero dei termini e q la ragione.

La somma dei termini di una progressione aritmetica (S_k) è data dalla seguente formula:

$$S_k = (a_1 + a_k)\frac{k}{2}$$

da cui, sostituendo a_k con la formula precedente, si ottiene:

$$S_k = \left[a_1 + a_1 + (k-1)q\right]\frac{k}{2} = \left[2a_1 + (k-1)q\right]\frac{k}{2} =$$

$$\boxed{S_k = a_1 k + (k-1)q\frac{k}{2}} \quad \text{(A)}$$

Per le **rate posticipate** si hanno progressioni ascendenti come le seguenti:
0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 + 11 (mensilità), dove $k = 12$ e $q = 1$
0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 (bimestralità), dove $k = 6$ e $q = 2$
0 + 3 + 6 + 9 (trimestralità), dove $k = 4$ e $q = 3$
ecc.

Nelle progressioni ascendenti si ha che:

$a_1 = 0$ e $q = \frac{12}{k}$

Sostituendo Σn_i con la formula (A) si ha:

$$\frac{S_k}{12} = \frac{1}{12}\left[0 + (k-1)\frac{12}{k}\frac{k}{2}\right] = \frac{k-1}{2} \quad \text{(c.d.d.)}$$

Per le **rate anticipate** si hanno invece delle progressioni discendenti come le seguenti:
12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 (mensilità), dove $k = 12$ e $q = -1$
12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 (bimestralità), dove $k = 6$ e $q = -2$
12 + 9 + 6 + 3 (trimestralità), dove $k = 4$ e $q = -3$
ecc.

Nelle progressioni discendenti si ha che:

$a_1 = 12$ e $q = -\frac{12}{k}$

Sostituendo Σn_i con la formula (A) si ha:

$$\frac{S_k}{12} = \frac{1}{12}\left[12k + (k-1)\left(-\frac{12}{k}\right)\frac{k}{2}\right] = \frac{1}{12} \times 12\left[k - \frac{k-1}{2}\right] = k - \frac{k-1}{2} = \frac{2k-k+1}{2} = \frac{k+1}{2} \quad \text{(c.d.d.)}$$